Стручни критички осврт

Снежана Гордић, *Generalized Stochastic Processes with Applications in Equation Solving* (наслов на српском: *Uopšteni stohastički procesi sa primenama u rešavanju jednačina*). Докторска дисертација. Нови Сад: Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду, Департман за математику и информатику, 2018, xii + 159 стр. (основни текст на штампаним странама 1–86; прилози A–C од стр. 87, библиографија од стр. 121, регистар од стр. 131, проширени извод на српском од стр. 135, биографија на стр. 148). Ментори: академик др Стеван Пилиповић и др Michael Oberguggenberger; комисија: Д. Селеши (председник), оба ментора, Д. Рајтер-Ћирић и Љ. Опарница. Научна област математика, научна дисциплина стохастичка анализа. Рад је писан на енглеском језику. Отворени приступ: НаРДуС.

I Предмет, грађа и мерило

Дисертација узима за предмет спој две математичке теорије које су се дуго развијале одвојено: теорију уопштених функција Коломбоовог типа, у којој се множење дистрибуција решава преласком на алгебру класа умерених низова глатких функција, и теорију стохастичких процеса. Предмет су уопштени стохастички процеси Коломбоовог типа — процеси с вредностима у Коломбоовим алгебрама, посматрани у класама $L^p(\Omega)$, $M^\infty(\Omega)$ и $L(\Omega)$ — а два су циља постављена изричито: „Two main aims of research are formulated: 1. Studying the probabilistic properties of CSPs, and 2. Application of the obtained results to solving some classes of SPDEs“ (стр. 7). Тежиште рада, дакле, није у самој конструкцији алгебре него у преношењу пробабилистичког апарата (очекивање, корелација, карактеристична функција, независност, стационарност) у Коломбоов оквир и у примени тако изграђене теорије на једну класу стохастичких парцијалних диференцијалних једначина. То разграничење биће важно при мерењу свих замерки које следе.

Пре свега осталог ваља изрећи мерило, изричито и без изузетка. Рукопис је пред комисијом био у децембру 2018. године: комисију за оцену именовало је Наставно-научно веће на седници 20.12.2018, а по датумима у самом раду (предговор „Sombor, 16. maj 2018.“, биографија „Novi Sad, 5. septembar 2018.“) рукопис је био довршен у другој половини те године. Рад се стога овде мери искључиво према литератури, математичким и струковним стандардима, прописима и знању који су постојали и били доступни пре краја 2018. Ништа што је настало касније није мерило — ни доцнија издања стандарда навођења и математичких знакова, ни прописи донети после тог тренутка. То правило важи и за списак литературе овог осврта: свака

његова јединица објављена је пре тог рока, изузев саме дисертације, реферата комисије и извора за чињенице које се временом не мењају (објављени библиографски подаци о раду [GOPS18b] и запис у НаРДуС-у), уз одговарајућу назнаку.

Наводи из дисертације преузети су дословно, у писму у коме су написани (главни текст на енглеском; предговор, проширени извод и кључна документацијска информација на српском, латиницом), с бројем стране према штампаној пагинацији рада (штампана страна = страна PDF-а − 12). Наводи из реферата комисије и из спољних извора такође су дословни.

Још једну ствар треба рећи на почетку, јер одређује како се цео рад чита. Реч је о математичкој дисертацији чији се допринос састоји од дефиниција, теорема и доказа; на њу се не може применити мерило доказане или оповргнуте хипотезе природнонаучног типа. Сам рад нигде не употребљава реч хипотеза, а ни реферат — говори се о циљевима и о резултатима. Остварење циља овде стога значи да су најављени резултати доказани, а не да је издржан емпиријски тест; то штити рад од једне врсте пренаглашене замерке, али не и од захтева да оно што тврди буде тачно, потпуно и доследно исказано.

II Шта рад доноси

Осврт је дужан да почне оним што дисертација јесте, јер је то и највећи део онога што она вреди.

Прво и најважније, рад доноси прву систематску пробабилистичку теорију општих Коломбоових стохастичких процеса. Поглавља 4 и 5, која су и реферат и сам рад означили као носиоце сопственог доприноса рада, доследно граде тројни апарат за класе $L^p(\Omega)$, $M^\infty(\Omega)$ и $L(\Omega)$: појам вредности процеса у уопштеној тачки с компактним носачем, мерљивост одговарајуће случајне променљиве, уопштено очекивање, уопштену корелациону и уопштену карактеристичну функцију, процесе с независним вредностима и њихову карактеризацију, те строгу и слабу стационарност и стационарне прираштаје. Ранији радови додиривали су поједине од тих особина у суженом оквиру, али систематског развоја целог апарата за опште процесе пре овог рада није било.

Друго, поглавље 3 доноси уопштење транслационе инваријантности. Класична чињеница да је транслационо инваријантна Коломбоова уопштена функција на $\mathbb{R}^d$ уопштена константа проширена је, Теоремом 3.2.1, на произвољан отворен конвексан скуп. Доказ (Беров став и телескопирање преко разлагања транслације на комаде истог правца, чиме парцијалне суме остају унутар помоћних скупова)

изложен је у целини, а рад отворено наводи да га је дао ментор: „Its proof was given by S. Pilipovi“ (стр. 29). То транспарентно приписивање, уз потпуно излагање доказа, узоран је однос према коауторском доприносу.

Треће, у поглављу 4 главни је резултат мерљивост пресликавања које процесу придружује његову вредност у уопштеној тачки, доказана прегледним свођењем прасликâ на пребројиве операције над мерљивим скуповима. Уз тај резултат стоји и пример који му поштено оивичава домет: он показује да за ширу σ-алгебру, генерисану оштром топологијом, мерљивост више не важи — „is not measurable with respect to the“ (стр. 45) — чиме се оправдава свесно ужи избор σ-алгебре генерисане оштрим отвореним лоптама.

Четврто, поглавље 5 доноси структурну карактеризацију уопштене корелационе функције: „we give a structural characterization of generalized correlation functions which correspond to embedded distributional stochastic processes“ (стр. 52), којом се Коломбоов рачун корелације повезује с класичном структуром (носач на дијагонали ⇔ облик преко извода делта-функције). Ту су и потапање карактеристичних функција класичних процеса, карактеризација процеса с независним вредностима преко носача корелационе функције, и запажање — тачно у гаусовском случају, где класична еквиваленција не важи општо — да је свака слабо стационарна гаусовска реализација уједно и строго стационарна.

Пето, поглавље 6 доводи теорију до конкретне примене: метод усклађивања уопштеног очекивања и уопштене корелационе функције преко Фуријеове трансформације — „we will match the expectations and correlations“ (стр. 76) — даје услове за постојање стационарног гаусовског решења једначине с уопштеним константним коефицијентима, а поступак се спроводи до краја на стационарној Клајн–Гордоновој једначини покретаној вишим изводима белог шума.

Најзад, потребно је поштено рећи и оно што надилази појединачне резултате. Рад доследно раздваја сопствено од преузетог и води опрезне формулације домета: главни резултат поглавља 6 у уводу је најављен као „We give a necessary condition (Theorem 6.1.1) for the existence“ (стр. 9) — потребан, не довољан услов — а зависност појмова од избора представника изричито је признавана и уграђена у саме дефиниције (преко постојања посебног представника): „it is not possible to give a characterization of a CSPs with independent values that would not depend on the choise of representatives“ (стр. 66). Тамо где су се тврдње рада — историјска приписивања, преузети класични резултати, библиографски подаци, садржина изведених рачуна — могле сравнити с изворима, у огромној већини су се показале тачним, а носећи докази (транслациона инваријантност, структурна теорема, факторизација за независне вредности, услов постојања решења) изведени су у целини и коректно. Та поузданост није споредна околност: она је оно што уопште омогућава да се о раду расправља овако детаљно.

III Циљеви, полазишта и метод

Циљеви рада постављени су као квалитативни истраживачки задаци (стр. 7), а не као проверљиве тезе, и то је за математичку дисертацију прихватљиво (в. одељак I). Њихово „остварење“ рад операционализује одмах, набрајањем конкретних питања која ће обрадити: „In order to achieve the first aim of research“ (стр. 7) следи попис (мерљивост, очекивање и корелација, карактеристична функција, независне вредности, стационарност) који се тачно пресликава на садржину поглавља 4–6.

Метод је, у ономе што је стварно спроведено, коректан и доследан: Беров став носи доказе транслационе инваријантности, а Фуријеова трансформација уз усклађивање момената носи цело поглавље 6 — обе технике најављене су и стварно употребљене, а метод усклађивања рад поштено везује за постојећу технику из литературе, без прикривања ослонца.

Две примедбе на овом слоју ипак имају језгро, обе везане за формулацију пре него за садржину. Прва је мотивациона премиса. Реченица „probabilistic properties of CSPs are not studied“ (стр. 7), поновљена у оштријем облику „none of these papers addressed the question of their probabilistic properties“ (стр. 47), преоштро је исказана: сопствени преглед у истом раду наводи да су у једном од цитираних радова проучаване стационарне реализације и реализације с независним вредностима, а то јесу пробабилистичке особине. Језгро мотивације ипак стоји — систематске теорије општег случаја није било — али би прецизније било то и рећи, уместо апсолута „not studied“ и „none“. Друга је завршни суд: реченица „Therefore, this dissertation brings relevant contributions to the theory of CSPs“ (стр. 85) изводи допринос везником из категоричког „all aims have been achieved“ (стр. 85), без исказаног мерила по коме би циљ могао и не бити остварен. Пошто су циљеви квалитативни задаци, „остварење“ се овде своди на доказаност најављених резултата — што стварно и стоји — па је реч о реторички лабавој вези, не о нетачној тврдњи; прикладније би било допринос везати непосредно уз доказане резултате поглавља 4–6. У истом реду је и то што закључак (одељак 7.1) претежно понавља формулације из увода и предговора; то само по себи није мана, али би завршно поглавље добило да, поред препричавања, изричитије вреднује сваки појединачни резултат.

IV Приказ Коломбоове теорије, претходних резултата и транслациона инваријантност

Експозиторно поглавље 2 своју сврху испуњава: преузети резултати преносе се уз тачне изворе (по правилу с бројем тврдње и страном), а кључне разлике Коломбоове алгебре од дистрибуција прецизно се илуструју — примери показују да носач може бити строго већи од носача дистрибуционе сенке и да производ који је у дистрибуцијама нула не мора бити нула у алгебри. Поглавље 3 је, уз преузету

теорему о инваријантности на R^d, носилац једног новог резултата (Теорема 3.2.1, в. одељак II), а прилог A прегледно скупља позадинску реалну, функционалну и мерно-вероватносну теорију с изворима на нивоу одсека. Тамо где је упут посебно користан, рад даје и тачну тврдњу и страну — што управо и јесте начин на који се преузет резултат наводи (Krantz, 2017: „The only correct and thorough way to give a reference is to cite the specific theorem or the specific page.“).

Замерке у овим деловима лаке су и, готово без изузетка, редакцијске. У доказу репродукованом из литературе (Теорема 3.1.1) завршни прелаз пређутно користи произвољност параметра, а исти симбол означава и индекс низа и број тачака поделе; корак је стандардан и очекиван од стручног читаоца, али би једна реченица уклонила и прескок и нотациону колизију — управо ону врсту двоструке употребе исте ознаке коју приручник струке изричито одвраћа (Knuth, Larrabee, Roberts, 1989, т. 14: „Don’t use the same notation for two different things.“). У истом поглављу, у претпоставци Теореме 3.2.1, транслација је записана као припадност скупу R иако из поставке следи да мора бити вектор из R^d; сам доказ то доследно и користи, па је реч о очигледној словној омашки. У помоћним корацима јављају се и знак припадности уместо инклузије и погрешно исписане ознаке представникâ у једном реду доказа — све без последица по коректност. Дискретна је непрецизност и у упуту на преузети резултат чија наведена страна не одговара часописној пагинацији него пагинацији препринта; број тврдње и приписивање су тачни.

У прилогу A неколико преузетих исказа непотпуно је или недоследно пренето, увек без последица по примену (у којој су све мере вероватносне): Фубинијева теорема исказана је без претпоставке σ-коначности, Радон–Никодимова тврди „јединствену“ густину без напомене да је јединственост до скупа мере нула, а у дефиницији Поасоновог процеса експонент је отиснут погрешно (не даје збир један), што противречи параметру наведеном у истој реченици. Ту су и словне и записне омашке — у дефиницији просте функције погрешан амбијент коефицијената и опсег индекса, у опису једног домена члан облика „|x2|≤x2“, у општем облику функционала изостао знак интеграла, а у више низовних простора домен исписан као припадност скупу N уместо O — све недвосмислено исправиво из контекста и меродавних дефиниција у главном тексту. Најзад, закључак да је корелациона функција позитивно дефинитна из позитивности њене Фуријеове трансформације назван је Бохнеровом теоремом, док је за дистрибуциони случај прецизан назив Бохнер–Шварцова теорема; садржај је тачан, реч је о терминолошком скраћивању.

V Коломбоови стохастички процеси: вредности у тачки и мерљивост

Поглавље 4 гради апарат брижљиво и с пуном свешћу о финоћама оквира. Дефиниције су постављене онако како оквир налаже — на пример, гаусовост није инваријанта класе, па је уведена преко постојања гаусовског представника („non-Gaussian representative of the same GCSP“ (стр. 41)) — а рад прецизира и шта дефиниције стварно захтевају („pathwise continuity does not imply“ (стр. 34)) и упозорава да канонска пресликавања међу класама нису улагања („although the mapping is not injective“ (стр. 37)). Главни резултат (мерљивост у уопштеној тачки) и пример који му оивичава домет већ су наведени у одељку II као вредности; тројна изградња простора с усаглашеним карактеризацијама умерености и занемарљивости чини уредан темељ на коме почива остатак рада.

Најозбиљнија појединачна замерка целог рада налази се, међутим, управо овде, и то у исказу једне помоћне пропозиције. У Пропозицији 4.1.2(a) хипотеза за други чинилац гласи „(vn)n ∈Ek Lq“ (стр. 35) — амбијентни простор свих низова, без услова умерености. Тако исписано, тврђење формално није тачно: производ занемарљивог низа и низа који расте брже од сваког полинома не мора бити занемарљив. Сам доказ, међутим, умереност користи, па је реч о испуштеном индексу (треба умерени простор); исправни облик — да је производ занемарљивог и умереног низа занемарљив — важи, а потоњи се резултати на њему не ослањају критично. Приговор стога стоји као стварна, али лако исправива и локализована формална омашка.

Из истог круга редакцијских пропуста у дефиницијама и помоћним доказима јесу и следећи: у преузетој дефиницији густине гаусовског вектора нормирајући фактор носи експонент просторне димензије уместо димензије самог вектора (броја тачака), па густина не интегрише у један кад се те две вредности разликују; у дефиницији темпираног простора код занемарљивог низа заостао је услов ограничења реда извода, наслеђен из дефиниција с тим параметром, иако га тај простор не уводи; а у једном доказу за класу L(Ω) завршни низ неједнакости механички је пренет из случаја L^p и користи ту норму, док у поставци L(Ω) исте оцене важе тачкасто за скоро свако ω. Ниједан од тих пропуста не дира резултате, али сви траже редакцијску исправку. Најзад, неколико помоћних доказа (варијанте за M^∞) скраћено је упутом на аналогију; то је експозициона економија коју приручник струке изричито брани — сажимање онога што се дословно понавља (Halmos, 1970) — а случајеви L(Ω) и L^p изведени су у целини, па главни резултат не трпи; једна реченица о преносу на фамилију семинорми довршила би формалну потпуност.

Овде треба поменути и једно сужавање које рад у закључку не изриче довољно прецизно. Завршна тврдња да је „the transfer of probabilistic arguments into the Colombeau setting is enabled“ (стр. 85) важи у мери у којој се аргументи воде преко σ-алгебре генерисане оштрим отвореним лоптама, у односу на коју је мерљивост и доказана; за ширу σ-алгебру оштре топологије она не важи, што рад сам показује поменутим примером. Избор је свестан и довољан за све аргументе које рад стварно спроводи, па је реч о прецизности сажетка: тврдњу би требало везати уз ту σ-алгебру.

VI Пробабилистичке особине: очекивање, корелација, карактеристична функција, независност и стационарност

Поглавље 5 је садржински најбогатији део сопствених резултата рада и, по ономе што се могло сравнити, поуздан. Структурна теорема о корелационој функцији изведена је у целини и повезује Коломбоов рачун с класичном структуром; карактеристична функција гаусовског процеса добијена је у затвореном облику с проверљивим примерима; независне вредности у уопштеним тачкама изведене су дугим али коректним рачуном (непрекидност мере, факторизација); а прецизно разликовање асоцијације и једнакости у алгебри („associated in the Colombeau sense, but not equal“ (стр. 51)) сведочи о владању финоћама оквира. Логички мост поглавља — да су гаусовске реализације потпуно одређене првим двама моментима, одакле слаба стационарност повлачи строгу — самостално је и тачно запажање.

Замерке су и овде претежно нотационе и локализоване, али једну треба издвојити. У Дефиницији 5.5.2 (слаба стационарност) услов инваријантности очекивања записан је као „for all h ∈R such that x, x + h ∈O“ (стр. 72), док одговарајућа дефиниција строге стационарности исправно тражи „for every h ∈Rd such that“ (стр. 69). Узето дословно, за димензију већу од један то би дало инваријантност само дуж једне координате, а Последица 5.5.3 доказује се применом Теореме 3.2.1, која захтева инваријантност под свим транслацијама — на шта се рад непосредно и позива: „Recall, Theorem 3.2.1 states that a generalized function“ (стр. 72) … „under all translation is a generalized constant“ (стр. 72). Да је реч о доследном штампарском пропусту (иста ознака и у проширеном изводу, стр. 139), а не о суштинској празнини, потврђује и то што други услов исте дефиниције, о облику корелационе функције, већ носи пуну вишедимензиону инваријантност; заменом ознаке скупа доказ Последице пролази без измене. Пропуст је, дакле, нотациони, али га треба исправити јер стоји у самој дефиницији носећег појма.

Остале замерке лаке су: у преузетој теореми о инверзу коваријационе матрице ознаке (број тачака и амбијентни скуп) требало би ускладити са сопственом дефиницијом из поглавља 4; структурни резултат о носачу корелационе функције на дијагонали природно се односи на центрирани процес (коваријансу), па би, пошто је

корелациона функција дефинисана као нецентрирани момент, било прецизније то и исказати уместо увођења нула-очекивања као претпоставке без ограничења општости; у међукораку рачуна карактеристичне функције изостала је нема променљива интеграције (стандардна Фуријеова трансформација гаусовске густине), а коначни израз и оба примера су тачни; у једном илустративном примеру други случај израза за коваријансу Брауновог кретања одштампан је с погрешним знаком услова, у оквиру у коме се цео рачун ионако води само за ненегативне вредности; а у другом је на једном молифајеру изостао индекс низа, исправно исписан на другим местима. Најзад, у илустративном примеру стационарност конструисаног процеса наведена је сажето („Observe…“), али следи из тога што је конструкција гаусовска с константним очекивањем и корелацијом облика функције разлике, што рад образлаже на истој страни; корак је реконструктиван из околних резултата.

VII Примене: стационарна решења и Клајн–Гордонова једначина

Поглавље 6 доводи изграђену теорију до конкретне једначине и, што ваља истаћи, чини то интелектуално поштено. Носећа теорема сажима цео допринос у нужни облик очекивања, нужни услов на корелациону функцију (с критеријумом непостојања решења кад симбол мења знак) и довољан услов постојања уз коерцитивност симбола; примери су добро изабрани да покрију обе стране те дихотомије (дегенерисани случај изван услова коерцитивности и регуларна Клајн–Гордонова једначина). Рад при том не прикрива границе метода него их именује: тежак проблем дељења са симболом који има реалне нуле изричито оставља отвореним — „This question has not been considered in the dissertation“ (стр. 80) — и признаје неједнственост решења, „Notice that the solution does not have to be unique“ (стр. 80), уз конкретну конструкцију другог решења. Пажња према избору представника („for all“ у нужном, „for some“ у довољном услову) додатно сведочи о зрелости изведбе.

Одатле, међутим, следи и главна замерка овом делу, која се тиче именовања домета. И у наслову метода и у закључку рад говори о „a method for solving a class of linear SPDEs“ (стр. 75), односно „the method of solving a class of SPDEs“ (стр. 85), док је стварно доказано мање: потребни услови и постојање само под коерцитивношћу симбола. Реч „метод“ звучи шире од онога што је изведено. Тежину замерке ваља поштено сузити: реч „class“ већ ограђује домашај на подкласу, а рад своје границе изричито наводи (стр. 80 и одељак 7.2), па је реч о прецизности назива, не о нетачности; прикладније би било говорити о поступку приказаном на једној класи и илустрованом примерима. У истом реду је и најава носеће теореме: уводна реченица „a necessary condition for the existence of a stationary Gaussian solution“ (стр. 76) не покрива део те исте теореме који даје довољан услов постојања. Садржај теореме је

коректан и делови су у њој јасно раздвојени; неспретна је само преамбула, коју би поправило именовање мешовите природе исказа — да се, у духу правила да се унапред каже шта се доказује (Halmos, 1970), најаве и потребни и, под коерцитивношћу, довољни услови.

Једна замерка тиче се потпуности носећег корака. Умереност низа решења — једино место на коме се постојање стварно тврди (довољан услов) — изведена је сажето, упутом на припадност конволутора одговарајућем простору и на литературу: „The sequence (un)n is moderate, since Sn“ (стр. 78), без исписане спојне оцене која коерцитивну оцену за конволутор повезује с умереношћу представника случајног процеса у $L^2(\Omega)$. Састојци те оцене присутни су на истој страни и корак је стандардан, али би пун ред затворио празнину у доказу постојања. Уз то, у истом поглављу помоћна тврдња да су гаусовски процеси потпуно одређени очекивањем и корелацијом дата је као „It is known that Gaussian processes are completely determined by their“ (стр. 76) без појединачног извора, а напомена да је свака слабо стационарна реализација и строго стационарна, у општем (негаусовском) облику не важи; обе се, међутим, у поглављу 6 користе само у гаусовском оквиру, где несумњиво важе, па је препорука ограда на тај случај. Остатак замерки козметички је: у једном примеру други знак једнакости у изразу за Фуријеову трансформацију дословно не важи (тачан облик користи наредна једначина), упут на фундаментално решење оператора наводи страну ван опсега цитираног чланка иако је сама формула преко Беселове функције тачна, а у једном реду доказа изостављен је индекс оператора и у једном изразу затварајућа заграда — све без последица по рачун.

VIII Формуле, ознаке, слике и језик

Рад садржи две слике (дијаграм типова конвергенције и узорачке путеве Брауновог кретања) и ниједну табелу; слике су илустративне и у позадинском прилогу. Нотација је, у највећем делу, доследна, а формуле уредне; замерке које следе козметичке су, али их је довољно да заслуже пажљиву коначну лектуру — управо ону коју приручници струке подразумевају (уз доследност ознака: Knuth, Larrabee, Roberts, 1989, т. 14).

Језичких и словних омашки има више него што би се очекивало у иначе брижљиво изведеном тексту: у уводу неслагање подмета и прирока („The subject of the research within this doctoral dissertation are Colombeau“ (стр. 1); „Each of these approaches have been investigated by many authors“ (стр. 3); „can be treated as a GSPs“ (стр. 2)) и низ штампарских грешака; у наслову једног одсека и у текућем натпису словна грешка у речи која треба да гласи Measurability (изостало слово); у поглављу 5 неколико куцаћих грешака; у поглављу 6 изостао предлог — „is a solution the given equation as well“ (стр. 82); а у прилозима читав низ омашки (међу њима погрешно име Радон–Никодимове теореме и презиме Schwartz). Норма математичког енглеског те

неслагања броја препознаје као грешке које треба отклонити (Trzeciak, 1995; Day, Gastel, 2016), а ниједна не дира математички садржај. У проширеном изводу на српском један термин преведен је неусаглашено (појам носача на дијагонали пренет као „asocirana na dijagonali“ (стр. 137)), што су различити појмови оквира; меродаван је главни текст на енглеском, у коме појам стоји исправно, па је реч о исправци превода у сажетку.

Два неслагања наслова и натписа заслужују посебан помен јер погађају навигацију кроз рад. У структурном прегледу увода наслов петог поглавља пренет је као „Colombeau Generalized Processes“ (стр. 8), док стварни наслов гласи „Probabilistic Properties of Colombeau Stochastic Processes“ (стр. 47); а на странама проширеног извода текуће заглавље није ресетовано после регистра, па погрешно носи натпис регистра. Обе омашке су формалне, али их треба отклонити.

Задржавање облика „Colombeau“ у енглеском (латиничком) тексту, уз транскрипцију „Коломбо(ов)“ у ћириличком реферату, правописно је исправно — изворно писање страних властитих имена допуштено је у латиничком тексту, а прилагођено у ћириличком (Правопис Матице српске, 2010) — и овде се не узима заману.

IX Научни апарат

Библиографски апарат је место на коме је рад међу најуреднијима. Попис од 95 јединица и позивања у тексту потпуно су двосмерно усклађени: ниједно дело није цитирано а непописано, нити пописано а нецитирано, а повратни упути на стране позивања тачни су за све јединице. Темељна дела наводе се из изворника, без посредног (секундарног) цитирања, а сопствено и преузето доследно су и изричито разграничени — што је управо начин на који струка препоручује да се преузети резултат приписује извору (Trzeciak, 1995). То су стварне вредности апарата и ваља их изрећи пре замерки.

Замерке се тичу потпуности и уједначености појединих јединица, не идентификације дела. Неколико јединица носи изостављена поља — назив часописа, свеску или стране, односно уреднике — а две различите књиге истог аутора наведене су с истоветним обимом, што одступа од захтева да референца садржи податке довољне за идентификацију и све расположиве податке (ISO 690:2010, §3.1; AMS Author Handbook, 2017: „Include all available information for references“; Krantz, 2017: „the author, title, journal, volume number of the journal, year, and pages are usually considered complete bibliographical data.“). У неколико јединица нарушени су редослед и интерпункција аутора (у два случаја презиме ментора наведено је прво, без запетâ, што мења ауторски навод и азбучно сврставање), а скраћенице часописа местимично су недоследне — оба одступања од захтева за јединственим стилом и интерпункцијом свих референци (ISO 690:2010, §3.5: „A

uniform style, format and punctuation scheme shall be used for all references in a document“). Реч је о пропустима у уносу који отежавају проналажење извора, при потпуно очуваној усклађености пописа и позивања.

У каталошким метаподацима постоје два стварна неслагања. Кључна документацијска информација наводи годину издања 2017, док насловна страна носи 2018; поље године требало би ускладити с насловном страном (празно поље датума одбране разумљиво је за рукопис попуњен пре одбране, а датум у НаРДуС-у је датум архивирања записа). Уз то, унутар самог рада исти објављени рад ауторке цитиран је с двама различитим бројевима тома: библиографија наводи „Monatshefte für Mathematik 186.4 (2018)“ (стр. 122), а биографија (CV) „Vol. 189, No. 4, 2018, 609-633“ (стр. 148). Овде треба бити прецизан у корист рада: према објављеном запису часописа (Monatshefte für Mathematik, том 186, бр. 4, 2018, стр. 609–633, DOI 10.1007/s00605-017-1109-z — податак који се временом не мења), податак у библиографији је тачан, а погрешан је онај у биографији, који треба исправити на том 186. Ту је, најзад, и словна омашка у наслову једног одсека у садржају и упут на последњу уместо на прву страну регистра — обоје навигационе исправке.

X Однос рада и реферата комисије

Реферат комисије, писан по прописаном обрасцу, оцењује да дисертација има „добро систематизовану структуру“ (реферат), да су резултати на високом теоријском нивоу, те да „формулација резултата је математички прецизна“ (реферат) и да су „докази теорема су тачно изведени“ (реферат). Тај део оцене одговара стању у тексту: носећи докази изведени су у целини и коректно, апарат је уредан, а сопствени допринос поглавља 3–6 стваран је и, у ономе што се могло сравнити, поуздан.

Једна оцена реферата, међутим, не одговара стању у тексту у пуном обиму. На питање о недостацима реферат одговара да их нема: „Дисертација нема недостатака“ (реферат), односно „The dissertation has no shortcomings“ (реферат). Та оцена у напетости је с оним што рад сам о себи признаје — отворен проблем дељења, нејединственост решења, немерљивост у односу на ширу σ-алгебру — и с низом формалних пропуста наведених у претходним одељцима (нетачна хипотеза Пропозиције 4.1.2(a), ознака у Дефиницији 5.5.2, неслагања наслова и метаподатака). Ниједан од тих пропуста не руши резултате, па оцена о вредности рада остаје на снази; али категорично „нема недостатака“ прејако је, тим пре што и сам реферат носи ситну омашку — том часописа наведен као „Vol. 189, No. 4, 2018, 609-633“ (реферат), док је тачан том 186 (в. одељак IX). Реч је о оцени комисије, не о тврдњи рада, и наводи се ради потпуности слике, а не као замерка садржини рада.

XI Шта остаје

Кад се све сабере, добија се оцена коју вреди изрећи у једном комаду, без ублажавања и без претеривања.

Дисертација Снежане Гордић солидан је и зрело изведен математички рад који теорији Коломбоових уопштених функција доноси оно што она пре тога није имала: прву систематску пробабилистичку теорију општих Коломбоових стохастичких процеса — вредности у уопштеној тачки и мерљивост, уопштено очекивање, корелациону и карактеристичну функцију, независне вредности и стационарност — уопштење транслационе инваријантности на отворене конвексне скупове, и метод који ту теорију доводи до конкретне класе стохастичких парцијалних диференцијалних једначина и до Клајн–Гордонове једначине. Носећи докази изведени су у целини и коректно, разграничење сопственог од преузетог узорно је, а рад са зрелом уздржаношћу именује сопствене границе уместо да их прикрива. Тамо где се могло сравнити с изворима, оно што рад тврди у највећем делу држи.

Слабости су, по оцени овог осврта, троструке, и ниједна не руши носеће резултате. Прва су формални пропусти у исказима: нетачна хипотеза једне помоћне пропозиције (изостављен услов умерености), која како је исписана формално не важи иако је доказ користи; ознака у дефиницији слабе стационарности која, узета дословно, за вишу димензију не покрива оно што доказ последице користи; и неколико записних омашки у преузетим дефиницијама (нормирајући фактор густине, заостали услов у темпираном простору, норма пренета из другог случаја). Све су локализоване и исправиве, али стоје у самим исказима, па их треба уклонити. Друга је прецизност неколиких формулација домета: назив „метод“ за поступак доказан на подкласи, најава носеће теореме поглавља 6 која прећуткује њен довољан услов, закључна тврдња о преносу пробабилистичких аргумената шира од доказаног (везаног за ужу σ-алгебру), и преоштра мотивациона премиса о празнини у литератури — свугде је садржај иза формулације тачан, али би формулацију требало свести на оно што је изведено. Трећа је редакцијски слој: непотпуне и недоследно наведене библиографске јединице, неслагања у каталошким метаподацима (година издања; том часописа у биографији), неусаглашени наслови и натписи, и низ словних грешака кроз цео текст и прилоге.

Изнад свега тога стоји једна правилност: провере, приказ туђих резултата и носећи докази изведени су брижљивије него што су дотерани помоћни искази, називи домета и лектура. Управо зато највећи део онога што треба поправити не тражи ново истраживање него доследно спровођење и пажљиву редакцију онога што је рад већ урадио тачно.

У евентуалном монографском издању или наставку истраживања најплодније би, по оцени овог осврта, биле следеће измене. Прво, исправити исказе с формалним пропустима — допунити хипотезу помоћне пропозиције условом умерености, заменити ознаку скупа у дефиницији слабе стационарности, и ускладити нормирајући фактор и заостале услове у преузетим дефиницијама. Друго, свести формулације домета на доказано: говорити о поступку приказаном на једној класи (а не о „методу“ за целу класу), најавити мешовиту (потребну и довољну) природу носеће теореме, и закључну тврдњу о мерљивости и преносу аргумената везати уз σ-алгебру у односу на коју је доказана. Треће, довршити носећи корак постојања решења пуном оценом умерености конволуције, и ублажити мотивациону премису у разграничење спрам радова који су поједине особине већ додирнули. Четврто, употпунити и уједначити библиографске јединице и исправити неслагања метаподатака и наслова, уз пажљиву коначну лектуру целог текста и прилога. А као природан наставак истраживања, које и сам рад назначава: структурна карактеризација момената вишег реда за класе L^p(Ω) и обрада отвореног проблема дељења са симболом који има реалне нуле.

Уз ту врсту редакције — која у највећем делу не тражи ново истраживање него доследно спровођење онога што је рад већ започео — ова дисертација остаје вредан и самосталан допринос стохастичкој анализи у Коломбоовом оквиру, чији би резултати имали шта да кажу и ужем стручном читаоцу и истраживачима на споју теорије уопштених функција и стохастике.

Литература

Предмет осврта

Гордић, Снежана. *Generalized Stochastic Processes with Applications in Equation Solving* [докторска дисертација]. Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду, Нови Сад, 2018. (Отворени приступ: НаРДуС, https://nardus.mpn.gov.rs/handle/123456789/11075.)

Извештај о оцени докторске дисертације Снежане Гордић (Образац 6). Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду, 23. јануар 2019.

Библиографски податак који се временом не мења

Gordić, S.; Oberguggenberger, M.; Pilipović, S.; Seleši, D. „Probabilistic properties of generalized stochastic processes in algebras of generalized functions“. *Monatshefte für Mathematik*, 186/4 (2018), 609–633. DOI 10.1007/s00605-017-1109-z. (Објављени запис часописа, наведен ради провере броја тома.)

Математичко писање и излагање

HALMOS, Paul R. „How to write mathematics“. *L'Enseignement Mathématique*, 2e série, 16 (1970), 123–152. DOI 10.5169/seals-43857.

KNUTH, Donald E.; LARRABEE, Tracy; ROBERTS, Paul M. *Mathematical Writing*. MAA Notes 14. Washington: Mathematical Association of America, 1989. ISBN 0-88385-063-X.

KRANTZ, Steven G. *A Primer of Mathematical Writing*. 2. изд. Providence, RI: American Mathematical Society, 2017. ISBN 978-1-4704-3658-2 (arXiv:1612.04888).

TRZECIAK, Jerzy. *Writing Mathematical Papers in English: A Practical Guide*. Gdańsk: GWO / European Mathematical Society, 1995.

DAY, Robert A.; GASTEL, Barbara. *How to Write and Publish a Scientific Paper*. 8. изд. Santa Barbara: Greenwood, 2016. ISBN 978-1-4408-4262-7.

Научни апарат и навођење

ISO 690:2010(E). *Information and documentation — Guidelines for bibliographic references and citations to information resources*. 3. изд. Geneva: ISO, 2010.

AMS Author Handbook — Journal Classes. Providence, RI: American Mathematical Society, септембар 2017.

Правопис

Правопис српскога језика. Приредили М. Пешикан, Ј. Јерковић, М. Пижурица. Измењено и допуњено издање. Нови Сад: Матица српска, 2010.